

Научная статья

Original article

УДК 338.5

doi: 10.55186/2413046X_2025_10_10_234

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦЕН
ТОВАРОВ НА ОСНОВЕ ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА
MATHEMATICAL MODELING OF OPTIMAL PRODUCT PRICING
BASED ON DEMAND ELASTICITY**



Горшунова Татьяна Алексеевна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры высшей математики – 3, ИПТИП, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва

Морозова Татьяна Анатольевна, старший преподаватель кафедры высшей математики – 3, ИПТИП, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва

Пихтилькова Ольга Александровна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики – 3, ИПТИП, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва

Пронина Елена Владиславовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики – 3, ИПТИП, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва

Gorshunova Tatyana Alekseevna, PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics – 3, IPTIP, Federal State Budgetary

Morozova Tatyana Anatolyevna, Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics – 3, IPTIP, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow

Pikhtilkova Olga Alexandrovna, PhD, Associate Professor, Department of Higher Mathematics – 3, IPTIP, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow

Pronina Elena Vladislavovna, PhD, Associate Professor, Department of Higher Mathematics – 3, IPTIP, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow

Аннотация. В представленной работе исследуется использование математического аппарата эластичности спроса для оптимизации ценовой политики и определения такой цены, при которой достигается максимальная выручка предприятия. Основная цель исследования состоит в построении теоретической и прикладной модели, позволяющей количественно описывать реакцию потребителей на изменение цены и находить точку, где повышение или понижение цены перестает быть экономически выгодным. В теоретической части проведен анализ сущности эластичности как отношения относительных изменений функции и аргумента. Показано, что данный показатель отражает степень чувствительности спроса к цене и может быть выражен как универсальный коэффициент взаимосвязи между динамикой продаж и уровнем цен. На основе этого разработана зависимость между функцией спроса и функцией выручки, позволяющая аналитически определить область, где доход предприятия возрастает, и область, где он снижается. Математически доказано, что точка максимальной выручки совпадает с состоянием единичной эластичности, при котором относительное изменение цены полностью компенсируется изменением объема продаж. Практическая часть исследования посвящена построению модели спроса на

основе эмпирических данных и последующему анализу с использованием метода наименьших квадратов. Полученная регрессионная зависимость позволила количественно определить интервалы эластичного и неэластичного спроса, а также выделить конкретный диапазон цен, при котором достигается максимум выручки. Проведенное исследование демонстрирует, что методы математического анализа могут успешно применяться в области ценообразования и управления прибылью. Использование концепции эластичности спроса обеспечивает формализованный и объективный подход к определению оптимальной стоимости товаров или услуг, позволяя принимать обоснованные управленческие решения, учитывать поведение потребителей и прогнозировать экономические результаты деятельности предприятия.

Abstract. The presented paper examines the use of the mathematical apparatus of demand elasticity to optimize pricing policy and determine the price at which a company's revenue reaches its maximum. The main objective of the study is to construct a theoretical and applied model that quantitatively describes consumer reactions to price changes and identifies the point at which further increases or decreases in price cease to be economically beneficial. In the theoretical section, the concept of elasticity is analyzed as the ratio of relative changes in a function and its argument. It is shown that this indicator reflects the degree of demand sensitivity to price and can be expressed as a universal coefficient linking sales dynamics with price levels. Based on this, a relationship between the demand function and the revenue function is developed, allowing for an analytical determination of the domain in which a company's income increases and the domain in which it decreases. It is mathematically proven that the point of maximum revenue coincides with the state of unitary elasticity, where the relative change in price is exactly offset by the corresponding change in sales volume. The practical part of the research focuses on constructing a demand model using empirical data and subsequent analysis through the method of least squares. The

resulting regression relationship made it possible to quantitatively determine the intervals of elastic and inelastic demand, as well as to identify the specific price range that maximizes revenue. The conducted study demonstrates that methods of mathematical analysis can be successfully applied in the field of pricing and profit management. The use of the concept of demand elasticity provides a formalized and objective approach to determining the optimal price of goods or services, enabling well-grounded managerial decisions, consideration of consumer behavior, and forecasting of the company's economic performance.

Ключевые слова: эластичность спроса, оптимизация ценовой политики, максимизация выручки, математическое моделирование, анализ чувствительности, управление прибылью

Keywords: demand elasticity, pricing policy optimization, revenue maximization, mathematical modeling, sensitivity analysis, profit management

Введение

Ценообразование является одной из ключевых задач современной экономической теории и практики управления. Для любой фирмы, независимо от масштаба и сектора деятельности, вопрос определения оптимальной цены — то есть такой, при которой достигается максимальная выручка — имеет стратегическое значение. В условиях ограниченных ресурсов и конкуренции выбор ценовой стратегии напрямую связан с пониманием закономерностей спроса, его динамики и чувствительности к изменениям цены [1][2].

Классическая экономическая теория объясняет эту зависимость через концепцию эластичности спроса, введенную в конце XIX века Альфредом Маршаллом, который определил эластичность как процентное изменение объема спроса при процентном изменении цены [3]. Позднее эта идея получила широкое развитие в работах по микроэкономике и математическому моделированию рынка [4][5]. Эластичность позволяет количественно измерить реакцию потребителей на изменение цены и тем

самым прогнозировать, приведет ли повышение или понижение цены к увеличению общей выручки.

Связь между эластичностью спроса и динамикой дохода была подробно рассмотрена в исследованиях современных экономистов и аналитиков. Как показано в учебных материалах по микроэкономике [6] и исследованиях компаний, занимающихся ценообразованием [7], общая закономерность выражается в следующем: если спрос эластичен (модуль эластичности больше единицы), то повышение цены уменьшает выручку, тогда как при неэластичном спросе (модуль меньше единицы) повышение цены увеличивает выручку. При этом точка единичной эластичности является критической — именно в ней достигается максимум общей выручки [8][9].

В последние десятилетия методы анализа эластичности получили развитие благодаря компьютерным моделям и регрессионным методам оценки функций спроса. Работы в области price optimization и revenue management используют статистические и машинно-обучающие подходы к прогнозированию реакции рынка на изменение цены [10][11]. Например, в исследовании Ito и Fujimaki (2016) показано, что корректная оценка эластичности является центральным элементом предсказательной модели оптимизации цен для цифровых и розничных рынков [12].

Однако, несмотря на развитие прикладных методов, основная математическая идея остается неизменной: эластичность может рассматриваться как производная функции спроса в относительных единицах, а анализ ее поведения позволяет аналитически определить точки локальных максимумов функции выручки. Такой подход дает возможность строить универсальные модели, применимые к различным видам рынков, независимо от характера товара или услуг.

Современные исследования подтверждают, что использование эластичности в качестве инструмента анализа и управления ценами имеет высокий уровень предсказательной точности [13][14]. Например, метаанализ

исследований по ценовой эластичности спроса на потребительские товары, выполненный Green и Alston (1990), показал, что средние значения ценовой чувствительности различаются по категориям, но поведение функции выручки подчиняется одинаковым закономерностям [15].

Настоящее исследование опирается на эти теоретические основы и направлено на практическое применение анализа эластичности для определения оптимальной цены. В работе построена модель зависимости спроса от цены с использованием регрессионного подхода, получена аналитическая формула эластичности и выполнено численное моделирование для демонстрации точки, в которой достигается максимум выручки. Помимо теоретического вывода, приведены примеры сопоставления результатов с эмпирическими рыночными данными, что позволяет подтвердить применимость метода в реальных условиях.

Таким образом, настоящая статья объединяет теоретическую строгость математического анализа и прикладную значимость экономического моделирования. Она показывает, что даже при ограниченных исходных данных возможно аналитически определить оптимальную цену, обеспечивающую максимальный доход, используя лишь свойства функции спроса и производные отношения между ценой и количеством реализуемых товаров.

1. Методология исследования

Понятие эластичности функции определяется как предел отношения относительного изменения значения функции к относительному изменению ее аргумента при стремлении приращения аргумента Δx к нулю.

Иными словами, эластичность выражает меру чувствительности функции к малым изменениям ее независимой переменной. Она показывает, на сколько процентов изменится значение функции при изменении аргумента на один процент.

Формально эластичность (обозначаемая как $E_x(y)$) положительной дифференцируемой функции $y = f(x)$, зависящей от положительной переменной x (то есть при положительном входе и положительном выходе), в точке x определяется следующим образом:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Таким образом, эластичность является безразмерной характеристикой, отражающей относительную скорость изменения функции по отношению к ее аргументу. В экономико-математическом и аналитическом контексте она используется для оценки степени реакции зависимой переменной на бесконечно малые изменения независимой.

В сущности, эластичность функции отражает процентное изменение значения функции при изменении ее аргумента на один процент. Иными словами, она количественно выражает степень реакции (чувствительности) выходной переменной по отношению к малым относительным изменениям входной переменной.

Используя ранее выведенное выражение для эластичности, рассмотрим пример вычисления. Пусть задана функция:

$$y = x^2 + x + 5$$

Для значения аргумента $x_1 = 100$ функция принимает значение

$$y_1 = 100^2 + 100 + 5 = 10105$$

Если увеличить аргумент на 1%, то есть положить $x_2 = 101$, получаем новое значение функции:

$$y_2 = 101^2 + 101 + 5 = 10307$$

Относительное изменение функции вычисляется как отношение нового значения к исходному:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{10307}{10105} \approx 1.0199$$

Это означает, что при увеличении аргумента на 1% значение функции возросло приблизительно на 1.99%. Следовательно, эластичность функции $y = x^2 + x + 5$ в точке $x = 100$ составляет примерно

$$E_x(y) \approx 1.99$$

Таким образом, можно заключить, что при данном значении аргумента функция демонстрирует умеренно эластичное поведение, поскольку относительное изменение выхода превышает относительное изменение входа почти в два раза.

Из геометрической интерпретации производной можно заключить, что

$$y' = tg(\alpha)$$

где α — угол наклона касательной к графику функции в точке $M(x, y)$, как показано на рисунке 1.

Далее формулу можно модифицировать следующим образом:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot tg\alpha$$

Эластичность функции (в абсолютных величинах) равна отношению расстояний вдоль касательной линии от данной точки на графике функции до точек ее пересечения с осями OX и OY .

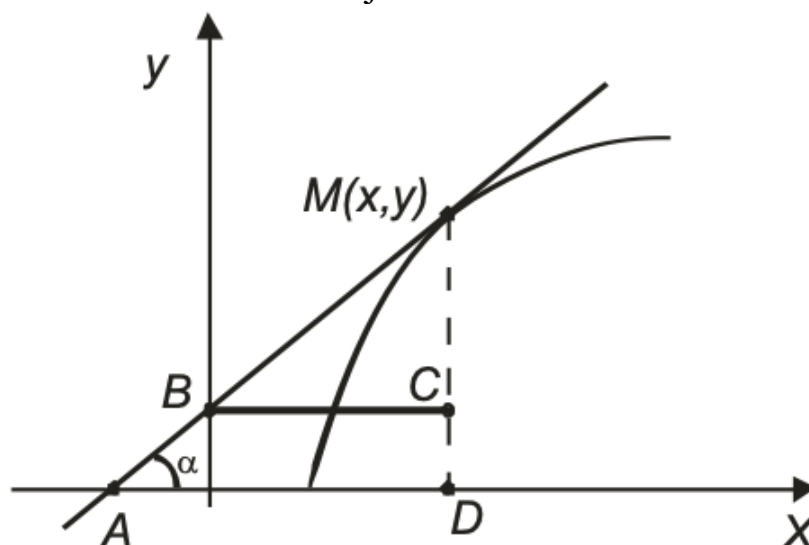


Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация производной

Если величина эластичности функции по переменной x удовлетворяет условию $|E_x(y)| > 1$, такая функция классифицируется как эластичная относительно данной переменной. Это означает, что при изменении аргумента x на 1% значение функции y изменяется на величину, превышающую 1%. Иными словами, функция демонстрирует высокую чувствительность к изменениям входного параметра и достаточно отзывчива на небольшие колебания аргумента. В экономическом, инженерном или любом другом прикладном контексте это означает, что выходная величина сильно реагирует на изменения входной, и управление переменной x оказывает значительное влияние на результат функции.

Если же величина эластичности функции удовлетворяет условию $|E_x(y)| < 1$, функция классифицируется как неэластичная относительно переменной x . В этом случае изменение аргумента x на 1% вызывает изменение значения функции y менее чем на 1%. Такой тип функции характеризуется низкой чувствительностью к колебаниям входного параметра, то есть функция слабо реагирует на изменения и изменения аргумента оказывают относительно небольшой эффект на результат. Это особенно важно при оценке

устойчивости системы или предсказуемости реакции функции на внешние воздействия.

Если величина эластичности функции равна единице, $|E_x(y)| = 1$, функция считается нейтральной. В данном случае изменение аргумента x приводит к точно пропорциональному по проценту изменению значения функции y . Функция в этом состоянии сохраняет постоянное соотношение между относительными изменениями аргумента и значения, демонстрируя прямую пропорциональную зависимость. Такая характеристика является важным индикатором баланса реакции функции на изменения аргумента и используется для анализа устойчивых пропорциональных связей в различных областях науки и техники.

Выручка от функций спроса

Определим, как ценовая эластичность функции спроса влияет на совокупную выручку в общем виде. Формула для совокупной выручки имеет вид:

$$r = qp$$

где q — количество проданных товаров, а p — их цена.

Пусть $q = q(p)$ — функция спроса, которую также будем рассматривать как количество произведенных и проданных товаров. Поскольку спрос на товар естественным образом уменьшается при росте цены, функция спроса является монотонно убывающей, следовательно, существует обратная функция $p = p(q)$.

Поскольку $p = p(q)$, выручку также можно выразить в виде функции количества:

$$r = r(q)$$

Для того чтобы определить связь спроса с прибылью, необходимо найти предельную выручку, которая представляет собой дополнительную совокупную выручку, возникающую при увеличении объема продаж товара на одну единицу.

Теперь найдем предельную выручку, взяв производную выручки по функции спроса:

$$r'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p \left(1 + \frac{q}{p} \cdot p'_q \right) =$$

Используя формулу эластичности, мы можем подставить $\frac{q}{p} \times p'_q$ вместо $E_q(p)$, а затем обратить выражение, поменяв местами p и q :

$$= p \left(1 + E_q(p) \right) = p \left(1 + \frac{1}{E_p(q)} \right)$$

Поскольку функция спроса является убывающей, $E_p(q) < 0$, что позволяет преобразовать уравнение в следующую форму:

$$r'_q = p \left(1 - \frac{1}{|E_p(q)|} \right)$$

Анализируя данную функцию, можно сделать следующие выводы:

Если функция спроса является неэластичной ($|E_x(y)| < 1$), учитывая, что цена p не может быть отрицательной, и произведя соответствующую подстановку, обнаруживаем, что $r'_q < 0$ при любой цене. Это означает, что с ростом цены спрос будет снижаться, однако уменьшение объема спроса будет соответствовать увеличению значения функции выручки, поскольку каждая единица товара продается по более высокой цене. В таком случае изменение цены оказывает относительно слабое влияние на величину спроса, и выручка продолжает расти с увеличением цены.

Если функция спроса является эластичной ($|E_x(y)| > 1$), тогда $r'_q > 0$, что означает, что увеличение спроса приводит к увеличению предельной выручки. В данном случае повышение или понижение единичной цены соответственно уменьшает или увеличивает общую выручку, так как реакция объема продаж на изменение цены более выражена, чем изменение цены само по себе.

Если функция спроса является нейтральной ($|E_x(y)| = 1$), то $r'_q = 0$. Это указывает на то, что ни повышение, ни снижение цены не приведут к увеличению относительной выручки. Поскольку цена p не может быть равна нулю, при нейтральном спросе функция выручки достигает локального максимума, что отражает состояние оптимального сочетания цены и объема продаж для максимизации дохода.

Таким образом, эластичность спроса напрямую определяет направление и величину изменения предельной выручки, а также позволяет выявить критические точки, при которых выручка достигает максимального значения или начинает снижаться.

Следовательно, при увеличении цены на товары с неэластичным спросом совокупная выручка от продаж возрастает, тогда как для товаров с эластичным спросом она уменьшается. Максимальная выручка достигается при нейтральной эластичности. Следовательно, изменение цены должно продолжаться до тех пор, пока не будет достигнуто состояние нейтральной эластичности, при котором относительное изменение цены и объема продаж находится в оптимальном соотношении для максимизации дохода.

2. Моделирование и анализ условной кривой спроса

Предположим, что в парке или на площади расположено 8 независимых точек продажи лимонада, все из которых работают одновременно на протяжении всего дня. В рамках одного исследовательского дня была проведена фиксация цены и объема проданного лимонада (в литрах) для

каждого продавца, что позволило выявить зависимость спроса от цены на практике (Таблица 1).

Таблица 1. Цены и объемы продаж лимонада для 8 торговых точек

Цена p , центы	368	309	229	184	137	111	86	57
Продано q , литры	94,3	110,2	159,7	190	230,4	273,1	322,9	378

Рисунок 2 – График кривой спроса

Предположим, что зависимость между количеством проданного лимонада q и ценой p описывается квадратичной функцией, как показано выше.

Тогда уравнение такой функции можно записать в виде:

$$p = aq^2 + bq + c$$

где a , b , c — коэффициенты, которые необходимо определить.

Для нахождения значений a , b и c используется метод наименьших квадратов, который позволяет построить аппроксимирующую функцию на основе экспериментальных данных, минимизируя сумму квадратов отклонений фактических цен от цен, рассчитанных по модели. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2. Расчетная таблица МНК при аппроксимации квадратичной функции

x / q	y / p	q ²	q ³	q ⁴	qp	q ² p
94,3	400	8892,49	838561,807	79076378,4	37720	3556996
110,2	309	12144,04	1338273,208	147477707,5	34051,8	3752508,36
159,7	229	25504,09	4073003,173	650458606,7	36571,3	5840436,61
190	184	36100	6859000	1303210000	34960	6642400
230,4	137	53084,16	12230590,46	2817928043	31564,8	7272529,92
273,1	111	74583,61	20368783,89	5562714881	30314,1	8278780,71
322,9	86	104264,41	33666977,99	10871067193	27769,4	8966739,26
378	57	142884	54010152	20415837456	21546	8144388
1758,6	1513	457456,8	133385342,5	41847770265	254497,4	52454778,86

Подставив суммы из таблицы в формулу квадратичной регрессии методом наименьших квадратов, получаем следующую систему нормальных уравнений:

$$1847770265a + 133385342.5b + 457456.8c = 52454778.86 ;$$

$$133385342.5a + 457456.8b + 1758.6c = 254497.4 ;$$

$$457456.8a + 1758.6b + 8c = 1513 .$$

С помощью численного решения системы нормальных уравнений получены приближенные значения коэффициентов квадратичной функции:

$$a \sim 0.00433669$$

$$b \sim 3.1105$$

Таким образом, уравнение аппроксимирующей квадратичной функции имеет вид:

$$p = 0.00434 q^2 - 3.11 q + 625$$

Теперь, чтобы выразить функцию спроса, перепишем функцию цены в более удобной форме:

$$p \sim (0.0622q - 25)^2$$

$$q = \frac{25 - \sqrt{p}}{0.0622} = 16.08(25 - \sqrt{p})$$

$$\begin{aligned} E_p(q) &= \frac{p}{16.08(25 - \sqrt{p})} \times (402 - 16.08\sqrt{p})' = \frac{p}{16.08(25 - \sqrt{p})} \times \left(-\frac{8.04}{\sqrt{p}}\right) \\ &= -\frac{p}{50\sqrt{p} - 2p} \end{aligned}$$

Эта форма позволяет анализировать, при каких ценах спрос является эластичным, неэластичным или нейтральным, а также прогнозировать изменение выручки при изменении цены.

Для определения ценового диапазона эластичного спроса необходимо составить систему неравенств, учитывающую, что цена не может быть отрицательной:

Условие эластичности спроса:

$$\left| -\frac{p}{2\sqrt{p}(25 - \sqrt{p})} \right| > 1$$

Условие положительного объема продаж:

$$16.08(25 - \sqrt{p}) > 0 \Rightarrow \sqrt{p} < 25$$

Преобразуем неравенство эластичности:

$$\begin{aligned} \frac{p}{50\sqrt{p} - 2p} &> 1 \\ p &> \frac{50\sqrt{p}}{3}; \end{aligned}$$

$$278 < p < 625$$

В результате спрос на лимонад является неэластичным при ценах в диапазоне от 0 до 278 центов, и эластичным при ценах от 278 до 625 центов.

Например, если одна из торговых точек продает лимонад по цене 2\$ за литр (200 центов в наших расчетах), то можно рекомендовать повышение цены для увеличения выручки, так как спрос в этом диапазоне неэластичен, и снижение объема продаж будет компенсировано более высокой ценой.

Аналогично, если точка продает лимонад по цене 5\$ за литр (500 центов), целесообразно снизить цену, чтобы стимулировать рост объема продаж, поскольку в этом диапазоне спрос эластичен, и увеличение продаж компенсирует снижение цены.

Теоретически оптимальная цена, обеспечивающая максимальную выручку, достигается при нейтральной эластичности, которая в данном случае составляет 2,78\$ (278 центов) за литр. При такой цене процентное изменение объема продаж точно соответствует процентному изменению цены, что обеспечивает максимальное значение функции выручки.

Функции спроса (а следовательно, и рекомендации по ценам) сильно различаются в зависимости от продукта.

Одним из известных примеров необычного спроса является спрос на табачные изделия. Чтобы проверить применимость нашей теории, рассмотрим задачу прогнозирования наиболее прибыльной цены на сигареты и сравним ее с историческими данными.

Для этого будем использовать данные, представленные в отчете 1933 года для рынка США авторства Э.Х. Шенберга, «The Demand Curve for Cigarettes» [16].

В отчете указано, что в 1926 году спрос на сигареты описывался следующей функцией:

— p — цена в долларах за тысячу сигарет,

– q — количество сигарет, потребляемое на душу населения в год.

Эта функция позволяет анализировать, как изменения цены влияли на потребление сигарет, и, следовательно, оценить оптимальную цену для максимизации выручки:

$$q = 1012,453 - 38,931p$$

Следовательно, эластичность этой функции спроса:

$$\begin{aligned} E_p(q) &= \frac{p}{1012,453 - 38,931p} \times (1012,453 - 38,931p)'_p \\ &= \frac{p}{1012,453 - 38,931p} \times (0 - 38,931) = \frac{-38,931p}{1012,453 - 38,931p} \end{aligned}$$

Из этого можно определить уравнение, при котором эластичность будет нейтральной, то есть, когда $|E_p(q)| = 1$.

Для решения создаем систему неравенств с условием $q > 0$, поскольку объем спроса не может быть отрицательным:

$$\left| \frac{-38,931p}{1012,453 - 38,931p} \right| = 1$$

$$1012,453 - 38,931p > 0$$

$\Rightarrow$

$$38,931p = 1012,453 - 38,931p$$

$$p < \frac{1012,453}{38,931}$$

$\Rightarrow$

$$p = 13$$

$$p < 26$$

Единичная (нейтральная) эластичность достигается при цене $p = 13$ т.е 13 долларов за 1000 сигарет, что соответствует 1,3 центам за одну сигарету.

Следовательно, теоретически оптимальная цена, обеспечивающая максимальную выручку, равна 13 долларов за тысячу сигарет.

При этом прибыль может быть получена при цене в диапазоне от 0 до 26 долларов за 1000 сигарет, так как в этом интервале спрос остается положительным и позволяет реализовать продукцию с доходом.

Для проверки предложенной ценовой рекомендации рассмотрим фактическую практику установления цен на сигареты в 1926 году.

Эти данные можно извлечь из прайс-листов продуктовых магазинов США 1926 года. В частности, в прайс-листе магазина Ralphs Grocery Co., расположенного в Лос-Анджелесе, штат Калифорния, цены на сигареты находились в диапазоне от 0,625 до 1,25 цента за сигарету, при этом средняя цена составляла 0,85 цента за сигарету [17].

Сопоставление этих исторических данных с теоретически рассчитанной оптимальной ценой — 1,3 цента за сигарету — демонстрирует, что фактический уровень цен был несколько ниже значения, обеспечивающего максимальную выручку. Это может отражать влияние факторов рыночной конкуренции, покупательной способности потребителей и иных экономических условий, действовавших в тот период.

Для анализа соотношения прогнозируемой и фактической цены построим график зависимости выручки от цены (Рисунок 3).

- Ось X — p , цена в долларах за 1000 сигарет.
- Ось Y — r , совокупная выручка в тысячах долларов.

Функция выручки задается уравнением:

$$r(p) = rq = 1012.453p - 38.931p^2, (26 > p > 0)$$

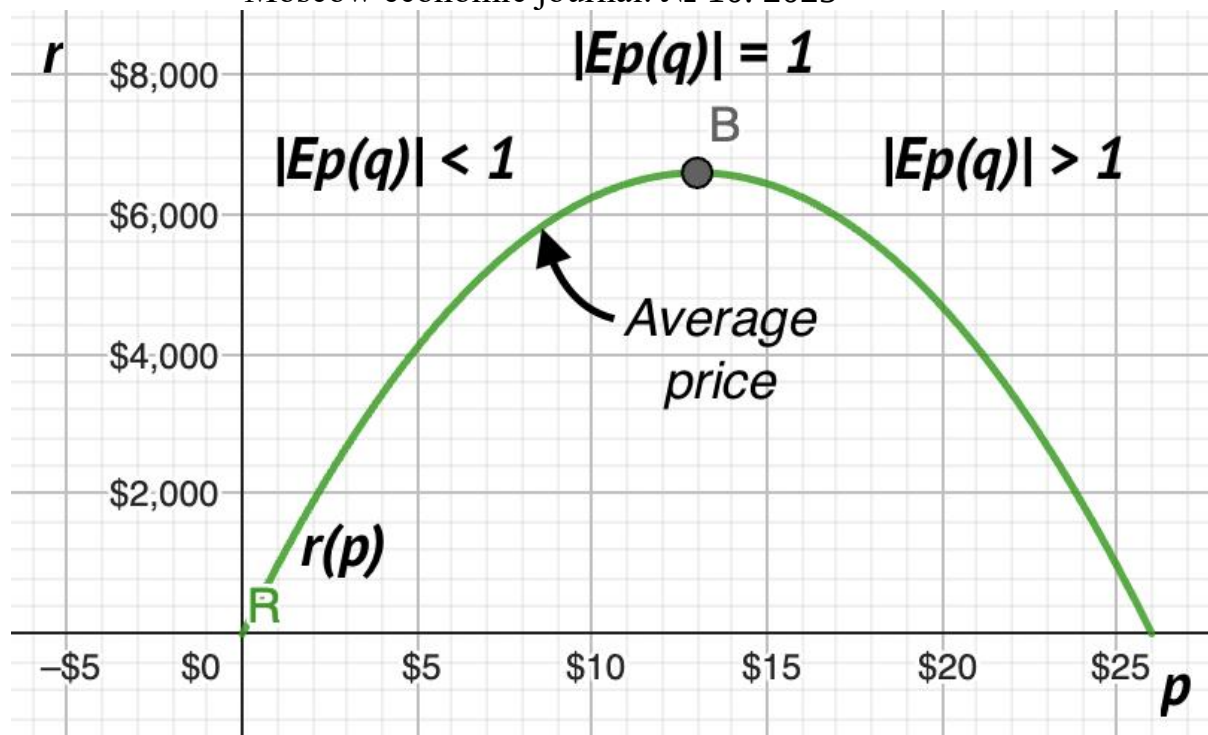


Рисунок 3 – Зависимость совокупной выручки от цены сигарет в 1926 году

Хотя фактическая цена существенно отличается от теоретически рассчитанной оптимальной, выручка при этом снижается лишь незначительно, что подтверждает, что наша прогнозная модель остается в целом корректной. В данном и аналогичных случаях различие между фактической и оптимальной ценой объясняется влиянием внешних экономических факторов, оказывающих воздействие на объем продаж.

Рекомендация повысить цену до теоретически оптимального уровня не всегда будет выгодна для производителя сигарет, поскольку конкуренция может ограничить возможность получения дополнительной прибыли: при увеличении цены потребители с высокой вероятностью приобретут более дешевый продукт конкурентов. Такая ситуация характерна для рынков с множеством брендов, которые обычно продаются в одном и том же месте.

Тем не менее, наш прогноз сохраняет актуальность в условиях, когда влияние конкуренции минимально или отсутствует: если все производители одновременно повышают цены, общая рыночная выручка будет увеличиваться в соответствии с моделью; или же если компания работает на

территории без конкурентов, она может установить цену с единичной эластичностью спроса и тем самым получить значительную прибыль.

Следует также отметить, что когда спрос на товар классифицируется как неэластичный или эластичный в общем виде, это отражает отклик спроса на изменение цены относительно средней рыночной цены. Однако из-за воздействия внешних факторов такое общее оценочное значение не может служить единственным основанием для изменения цены с целью увеличения выручки.

Результаты исследования и рекомендации по ценообразованию

На основании построенной функции выручки и анализа кривой спроса можно дать подробные рекомендации по ценообразованию. В диапазоне цен от $p = 0$ до $p = 13$ долларов за 1000 сигарет спрос является неэластичным, что позволяет повышать цену до достижения единичной эластичности. В этом диапазоне увеличение цены приводит к менее значительному снижению объема продаж, чем увеличение цены, поэтому общая выручка увеличивается.

В диапазоне цен от $p = 13$ до $p = 26$ долларов спрос становится эластичным, и в этом случае снижение цены способствует увеличению совокупной выручки, так как уменьшение цены вызывает пропорционально большее увеличение объема продаж. Идеальной точкой ценообразования является цена, соответствующая нейтральной эластичности, расположенной на вершине функции выручки. Однако в реальных рыночных условиях достижение теоретически оптимальной цены не всегда возможно из-за воздействия внешних экономических факторов, таких как конкуренция, покупательная способность потребителей и наличие альтернативных товаров. В условиях рыночной конкуренции компании рекомендуется устанавливать цену близкую к среднерыночной, чтобы не потерять потребителей в пользу конкурентов, сохраняя при этом приемлемый уровень выручки.

Заключение

Эластичность функции является количественной характеристикой, показывающей, как процентное изменение входного параметра (например, цены) влияет на процентное изменение выходного значения функции (например, объема продаж). Применение концепции эластичности к функциям спроса позволяет оценивать отклик потребителей на изменение цены и служит основой для разработки стратегии ценообразования с целью максимизации выручки.

– В случае неэластичного спроса повышение цены приводит к уменьшению объема продаж меньше, чем пропорционально увеличению цены, что в итоге увеличивает общую выручку.

– В случае эластичного спроса повышение цены приводит к уменьшению объема продаж больше, чем пропорционально, что снижает общую выручку.

Изменение цены рекомендуется продолжать до тех пор, пока эластичность не достигнет нейтрального значения, то есть когда ее абсолютная величина равна 1. Точка нейтральной эластичности соответствует максимальной выручке; таким образом, определение цены, при которой эластичность равна единице, является ключевым инструментом для нахождения оптимального уровня дохода.

Тем не менее, несмотря на то, что теория эластичности служит надежной основой для ценообразования, необходимо учитывать влияние внешних факторов, которые выходят за рамки чисто математических моделей. Среди них: наличие конкуренции, ограниченная покупательная способность потребителей, сезонные колебания спроса, маркетинговые кампании и региональные особенности рынка. В условиях значительной конкуренции стратегически целесообразно устанавливать цену на уровне рыночного среднего, чтобы минимизировать отток клиентов и сохранить конкурентоспособность.

Для рынков, на которые внешние факторы влияют в меньшей степени, и где спрос достаточно предсказуем, анализ эластичности функции спроса остается надежным и точным методом определения цены, обеспечивающей максимальную выручку. Применение данной методики позволяет компаниям не только прогнозировать финансовый результат от изменения цены, но и разрабатывать долгосрочную стратегию ценообразования, основанную на количественном анализе поведения потребителей.

В целом, использование концепции эластичности как инструмента ценообразования сочетает в себе теоретическую строгость и практическую применимость, предоставляя количественно обоснованные рекомендации для принятия управленческих решений в области маркетинга и стратегического планирования.

Список источников

1. Varian, H. R. (2019). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. W.W. Norton.
2. Krugman, P., & Wells, R. (2020). *Microeconomics*. Macmillan Learning.
3. Marshall, A. (1890). *Principles of Economics*. Macmillan and Co.
4. Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2018). *Microeconomics*. Pearson Education.
5. Nicholson, W., & Snyder, C. (2016). *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*. Cengage Learning.
6. Mankiw, N. G. (2021). *Principles of Economics*. Cengage Learning.
7. Dolgui, A., & Proth, J. M. (2010). *Supply Chain Engineering: Useful Methods and Techniques*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-84996-017-5>
8. Perloff, J. M. (2016). *Microeconomics: Theory and Applications with Calculus*. Pearson.
9. Gravelle, H., & Rees, R. (2004). *Microeconomics*. Pearson Education.
10. Talluri, K. T., & Van Ryzin, G. J. (2004). *The Theory and Practice of Revenue Management*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b97879>

11. Phillips, R. L. (2021). Pricing and Revenue Optimization. Stanford University Press. <https://doi.org/10.1515/9781503629998>
12. Ito, S., & Fujimaki, R. (2016). Prescriptive Price Optimization. arXiv preprint arXiv:1605.05422.
13. Shankar, V., & Bolton, R. N. (2004). An empirical analysis of determinants of retailer pricing strategy. Marketing Science, 23(1), 28–49. <https://doi.org/10.1287/mksc.1030.0030>
14. Dutta, S., Bergen, M., Levy, D., Ritson, M., & Zbaracki, M. J. (2002). Pricing as a strategic capability. MIT Sloan Management Review, 43(3), 61–66.
15. Green, R., & Alston, J. M. (1990). Elasticities in Demand Analysis and Their Empirical Applications. American Journal of Agricultural Economics, 72(2), 442–449. <https://doi.org/10.2307/1242321>
16. The Demand Curve for Cigarettes.” The Journal of Business of the University of Chicago 6, no. 1 (1933): 15–35.
17. Ralphs Grocery Co. Monthly Price List 1926. Retrieved from <https://hdl.handle.net/2027/uc1.31822031041890>
18. Астафьев, Р. У. Основные подходы к формированию математических и имитационных моделей на основе баз знаний в разработке программного обеспечения / Р. У. Астафьев // Computational Nanotechnology. – 2024. – Т. 11, № S5. – С. 142-151. – DOI 10.33693/2313-223X-2024-11-5-142-151. – EDN CCLNZK.
19. Астафьев, Р. У. Подходы к анализу качества электронных образовательных сред / Р. У. Астафьев // Индустриальное программирование - 2024 : сборник докладов международной научно-практической конференции, Москва, 04–05 апреля 2024 года. – Москва: МИРЭА - Российский технологический университет, 2024. – С. 14-15. – EDN LBZNOP.
20. Сидоров, А. А. Формулы вычисления рациональных интегралов для некрatных корней / А. А. Сидоров // Инновационные технологии в

электронике и приборостроении : сборник докладов Российской научно-технической конференции с международным участием Физико-технологического института РТУ МИРЭА, Москва, 16–17 апреля 2020 года. Том 1. – Москва: МИРЭА - Российский технологический университет, 2020. – С. 294-297. – EDN HJECVV.

21. Сидоров, А. А. Формулы вычисления рациональных интегралов для некратных корней. Часть 2 / А. А. Сидоров // Инновационные технологии в электронике и приборостроении : сборник докладов Российской научно-технической конференции с международным участием Физико-технологического института РТУ МИРЭА, Москва, 16–17 апреля 2020 года. Том 1. – Москва: МИРЭА - Российский технологический университет, 2020. – С. 298-301. – EDN TLYSRZ.

22. SIDOROV Andrei, 2024, THE IMPACT OF ANNOUNCEMENTS ON CRYPTOCURRENCY PRICES, Revista Economică, Lucian Blaga University of Sibiu, Faculty of Economic Sciences, vol.76(4), pages 69-94, December. DOI: <https://doi.org/10.56043/reveco-2024-0035>

23. Чекалкин Н.С., Соколаева Н.Н., Гельмиярова В.Н., Морозова Т.А. Математические инструменты для статистического анализа восполнения инженерных кадров//Московский экономический журнал. – 2025. – Т. 10, № 9. – С. 254-268.

24. Сидоров, А. А. Ответственность туроператора по договору оказания международных туристских услуг / А. А. Сидоров // Colloquium-Journal. – 2019. – № 19-8(43). – С. 33-34. – EDN ICPKSR.

25. Сидоров, А. А. Пунктуация как языковое явление / А. А. Сидоров // E-Scio. – 2019. – № 10(37). – С. 520-531. – EDN KFMFOD.

26. Морозова Т.А., Гельмиярова В.Н., Пулькин И.С., Евсеева О.А., Чернышев И.Д. Статистический анализ состава и структуры внешней торговли Российской Федерации//Морозова Т.А., Гельмиярова В.Н., Пулькин И.С., Евсеева О.А., Чернышев И.Д. Московский

27. Отдельные аспекты применения универсальной тригонометрической подстановки / О. Р. Параскевопуло, В. Н. Гельмиярова, О. Ю. Козлова, А. А. Сидоров // Перспективные материалы и технологии (ПМТ-2025) : Сборник докладов Национальной научно-технической конференции с международным участием, Москва, 07–12 апреля 2025 года. – Москва: МИРЭА - Российский технологический университет, 2025. – С. 1368-1374. – EDN EGAQQB.

References

1. Varian, H. R. (2019). Intermediate Microeconomics: A Modern Approach. W.W. Norton.
2. Krugman, P., & Wells, R. (2020). Microeconomics. Macmillan Learning.
3. Marshall, A. (1890). Principles of Economics. Macmillan and Co.
4. Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2018). Microeconomics. Pearson Education.
5. Nicholson, W., & Snyder, C. (2016). Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions. Cengage Learning.
6. Mankiw, N. G. (2021). Principles of Economics. Cengage Learning.
7. Dolgui, A., & Proth, J. M. (2010). Supply Chain Engineering: Useful Methods and Techniques. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-84996-017-5>
8. Perloff, J. M. (2016). Microeconomics: Theory and Applications with Calculus. Pearson.
9. Gravelle, H., & Rees, R. (2004). Microeconomics. Pearson Education.
10. Talluri, K. T., & Van Ryzin, G. J. (2004). The Theory and Practice of Revenue Management. Springer. <https://doi.org/10.1007/b97879>
11. Phillips, R. L. (2021). Pricing and Revenue Optimization. Stanford University Press. <https://doi.org/10.1515/9781503629998>
12. Ito, S., & Fujimaki, R. (2016). Prescriptive Price Optimization. arXiv preprint arXiv:1605.05422.

13. Shankar, V., & Bolton, R. N. (2004). An empirical analysis of determinants of retailer pricing strategy. *Marketing Science*, 23(1), 28–49. <https://doi.org/10.1287/mksc.1030.0030>
14. Dutta, S., Bergen, M., Levy, D., Ritson, M., & Zbaracki, M. J. (2002). Pricing as a strategic capability. *MIT Sloan Management Review*, 43(3), 61–66.
15. Green, R., & Alston, J. M. (1990). Elasticities in demand analysis and their empirical applications. *American Journal of Agricultural Economics*, 72(2), 442–449. <https://doi.org/10.2307/1242321>
16. “The Demand Curve for Cigarettes.” *The Journal of Business of the University of Chicago*, 6(1), 15–35 (1933).
17. Ralphs Grocery Co. Monthly Price List 1926. Retrieved from <https://hdl.handle.net/2027/uc1.31822031041890>
18. Astafyev, R. U. (2024). Main approaches to forming mathematical and simulation models based on knowledge bases in software development. *Computational Nanotechnology*, 11(S5), 142–151. DOI 10.33693/2313-223X-2024-11-5-142-151. EDN CCLNZK.
19. Astafyev, R. U. (2024). Approaches to analyzing the quality of electronic educational environments. In *Industrial Programming – 2024: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Moscow, April 4–5, 2024* (pp. 14–15). Moscow: MIREA – Russian Technological University. EDN LBZNOP.
20. Sidorov, A. A. (2020). Formulas for calculating rational integrals for non-multiple roots. In *Innovative Technologies in Electronics and Instrumentation: Proceedings of the Russian Scientific and Technical Conference with International Participation, Moscow, April 16–17, 2020, Vol. 1*, 294–297. Moscow: MIREA – Russian Technological University. EDN HJECCV.
21. Sidorov, A. A. (2020). Formulas for calculating rational integrals for non-multiple roots. Part 2. In *Innovative Technologies in Electronics and Instrumentation: Proceedings of the Russian Scientific and Technical Conference*

22. Sidorov Andrei (2024). The impact of announcements on cryptocurrency prices. *Revista Economică*, Lucian Blaga University of Sibiu, Faculty of Economic Sciences, 76(4), 69–94, December. <https://doi.org/10.56043/reveco-2024-0035>

23. Chekalkin, N. S., Sokolaeva, N. N., Helmiyarova, V. N., & Morozova, T. A. (2025). Mathematical tools for statistical analysis of engineering workforce replenishment. *Moscow Economic Journal*, 10(9), 254–268.

24. Sidorov, A. A. Liability of a tour operator under an agreement for the provision of international tourist services / A. A. Sidorov // *Colloquium-Journal*. - 2019. - No. 19-8 (43). - P. 33-34. - EDN ICPKSR.

25. Sidorov, A. A. Punctuation as a linguistic phenomenon / A. A. Sidorov // *E-Scio*. - 2019. - No 10(37). – S. 520-531. – EDN KFMFOD.

26. Morozova, T. A., Helmiyarova, V. N., Pulkin, I. S., Evsheeva, O. A., & Chernyshev, I. D. (2025). Statistical analysis of the composition and structure of foreign trade of the Russian Federation. *Moscow Economic Journal*, 10(2), 193–212.

27. Certain aspects of the application of the universal trigonometric substitution / O. R. Paraskevopulo, V. N. Gelmiyarova, O. Yu. Kozlova, A. A. Sidorov // *Advanced Materials and Technologies (PMT-2025): Collection of reports of the National Scientific and Technical Conference with international participation, Moscow, April 7–12, 2025. – Moscow: MIREA - Russian Technological University, 2025. – P. 1368–1374. – EDN EGAQQB.*

© Горшунова Т.А., Морозова Т.А., Пихтилькова О.А., Пронина Е.В., 2025.

Московский экономический журнал, 2025, № 10.